Réseaux de Petri

--o--

Documents autorisés: cours polycopié et notes de cours

Durée 1 heure

Considérons le problème des philosophes chinois (pour trois philosophes). Chaque philosophe peut être dans deux états, soit il pense, soit il est en train de manger des spaghettis (chinois). Pour manger il a besoin de deux ressources qui sont les baguettes. Malheureusement, vu la grande pauvreté du maître de maison, il n'y a que trois baguettes sur la table, elles sont posées entre les philosophes. Dans l'état initial les trois philosophes pensent. Chaque fois qu'un philosophe décide de manger, il doit prendre la baguette située à sa droite et la baguette située à sa gauche. Il doit faire cela d'un coup pour éviter la situation de blocage mortel qui peut arriver si chaque philosophe n'a qu'une seule baguette. Lorsqu'un philosophe est rassasié, il repose les deux baguettes ce qui donne à ses voisins une possibilité de manger.

Exercice 1 :

On choisit de baser la représentation sur 6 objets : les 3 philosophes et les 3 baguettes. Le réseau de Petri de la figure 1 représente une vision abstraite du système d'objets. On veut faire apparaître les états éventuels des 6 objets.

a) calculer une base de composantes conservatives **positives.**

b) Donner les états internes des 6 objets trouvés.

c) Montrer qu'il est impossible que deux philosophes se saisissent d'une même baguette.

Exercice 2 :

Montrer par réduction (bien donner les règles) du réseau de Petri de la figure 1 qu'il possède bien les "bonnes" propriétés.

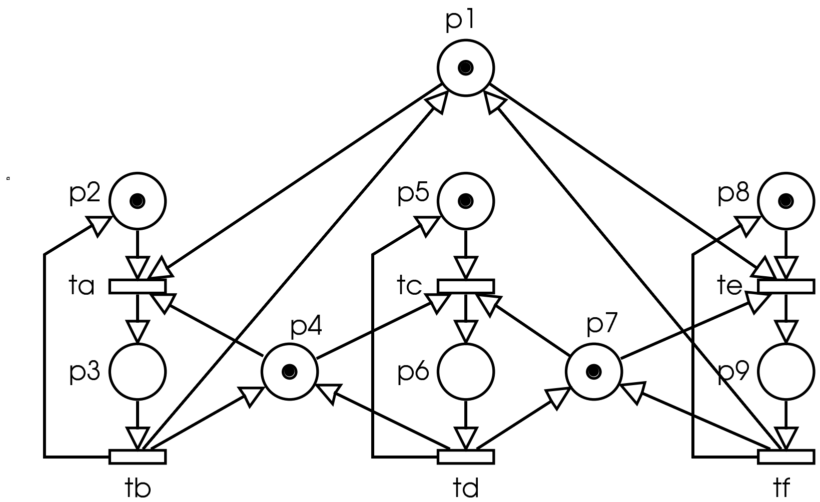

Figure 1

Correction

--o--

<u>Exercice 1 :</u>

a) On construit la matrice C puis on cherche à résoudre le système d'équation $C^T.f = 0$ (ou, de façon équivalente : $f^T.C = 0$) en privilégiant les vecteurs de base positifs.

$$C = \begin{array}{c} \\ p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \\ p5 \\ p6 \\ p7 \\ p8 \\ p9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} ta & tb & tc & td & te & tf \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

On peut éliminer l'équation associée à *ta* et la variable associée à *p3* en remplaçant la ligne associée à *p1* par la somme des lignes associées à *p1* et *p3*, celle associée à *p2* par la somme de celles associées à *p2* et *p3* et enfin celle associée à *p4* par la somme de celles associées à *p3* et *p4*.

$$C_1 = \begin{array}{c} \\ p1+p3 \\ p2+p3 \\ p3+p4 \\ p5 \\ p6 \\ p7 \\ p8 \\ p9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} tb & tc & td & te & tf \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Maintenant on peut éliminer l'équation associée à *tc* et la variable associée à *p6* en remplaçant la ligne associée à *p3+p4* par la somme des lignes associées à *p3+p4* et *p6*, celle associée à *p5* par la somme de celles associées à *p5* et *p6* et enfin celle associée à *p7* par la somme de celles associées à *p6* et *p7*.

$$C_2 = \begin{array}{r} \\ p1+p3 \\ p2+p3 \\ p3+p4+p6 \\ p5+p6 \\ p6+p7 \\ p8 \\ p9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} tb & td & te & tf \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Finalement on peut éliminer l'équation associée à *te* et la variable associée à *p9* en remplaçant la ligne associée à *p1+p3* par la somme des lignes associées à *p1+p3* et *p9*, celle associée à *p6+p7* par la somme de celles associées à *p6+p7* et *p9* et enfin celle associée à *p8* par la somme de celles associées à *p8* et *p9*.

$$C_3 = \begin{array}{r} \\ p1+p3+p9 \\ p2+p3 \\ p3+p4+p6 \\ p5+p6 \\ p6+p7+p9 \\ p8+p9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} tb & td & tf \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

On obtient alors la base suivante formée de 6 composantes toutes positives, et les invariants associés :

$$\text{Base :} \begin{array}{r} \\ p1 \\ p2 \\ p3 \\ p4 \\ p5 \\ p6 \\ p7 \\ p8 \\ p9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f^1 & f^2 & f^3 & f^4 & f^5 & f^6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \text{Invariants :} \begin{cases} I^1 : M(p1)+M(p3)+M(p9)=1 \\ I^2 : M(p2)+M(p3)=1 \\ I^3 : M(p3)+M(p4)+M(p6)=1 \\ I^4 : M(p5)+M(p6)=1 \\ I^5 : M(p6)+M(p7)+M(p9)=1 \\ I^6 : M(p8)+M(p9)=1 \end{cases}$$

b) Comme les 6 composantes ne contiennent, chacune, qu'un seul jeton, il est possible d'associer un objet à chacune d'entre elles.

A la composante I^1, on peut associer la baguette *B1*, avec les trois états *p1* (disponible), *p3* (utilisée par *Ph1*) et *p9* (utilisée par *Ph3*).

A la composante I^3, on peut associer la baguette *B2*, avec les trois états *p4* (disponible), *p3* (utilisée par *Ph1*) et *p6* (utilisée par *Ph2*).

A la composante I^5, on peut associer la baguette *B3*, avec les trois états *p7* (disponible), *p6* (utilisée par *Ph2*) et *p9* (utilisée par *Ph3*).

A la composante I^2, on peut associer le philosophe *Ph1* avec ses deux états *p2* (pense) et *p3* (mange).

A la composante I^4, on peut associer le philosophe *Ph2* avec ses deux états *p5* (pense) et *p6* (mange).

A la composante I^6, on peut associer le philosophe *Ph3* avec ses deux états *p8* (pense) et *p9* (mange).

c) Considérons le philosophe *Ph1*. Le seul état pour lequel il a des baguettes (*B1* et *B2*) est l'état codé par $M(p3)=1$. D'après les invariants I^1 et I^3, cela implique $M(p6)=0$ et $M(p9)=0$ et donc les deux autres philosophes *Ph2* et *Ph3* ne peuvent pas manger. Ils n'ont donc pas les baguettes. Par symétrie cela est vrai pour toutes les baguettes.

En fait ce sont les invariants I^1, I^3 et I^5 qui assurent qu'une baguette donnée ne peut être utilisée que par un philosophe à la fois.

Exercice 2 :

La place *p3* est substituable. En effet, la transition *ta* produit un jeton dans la place *p3*, et ce jeton est exactement la condition nécessaire (la seule) au franchissement de *tb*. Il est consommé par le franchissement de *tb*. De plus le marquage initial de *p3* est zéro ($M_0(p3)=0$). Et la transition *tb* possède au moins une place en sortie : *p2*. Nous aurons donc équivalence vis-à-vis des trois bonnes propriétés.

Exactement de la même façon (par symétrie), les places *p6* et *p9* sont substituables. On obtient alors le réseau de Petri de la figure 2.

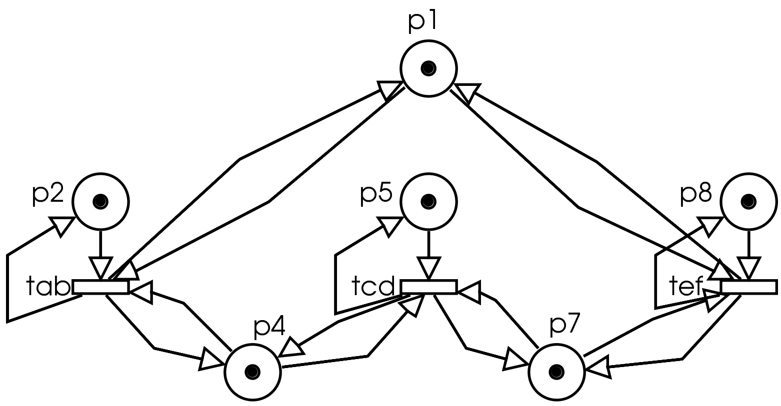

Figure 2

Maintenant les places *p1*, *p2*, *p4*, *p5*, *p7* et *p8* sont implicites de façon dégénérée. Elles ne sont reliées au reste du réseau de Petri que par des boucles élémentaires (de poids 1) et leur marquage initial (égal à 1) est tel qu'elles ne peuvent empêcher leurs transitions de sortie d'être franchies. On obtient alors le réseau de Petri de la figure 3.

Figure 3

Finalement les transitions *tab*, *tcd* et *tef* sont identiques car elles ont les mêmes ensembles de places d'entrée et les mêmes ensembles de places de sortie (il s'agit des ensembles vides). On obtient alors le réseau de la figure 4. Il s'agit du réseau complètement réduit qui est borné, vivant et réinitialisable.

Figure 4

Donc le réseau de Petri initial est également borné, vivant et réinitialisable. A partir des invariants de places I^1, I^2 , I^3 , I^4 , I^5 et I^6 calculés auparavant, il est même possible de préciser que le réseau est sauf (c'est-à-dire 1-borné).